Stejnoměrná konvergence posloupností funkcí

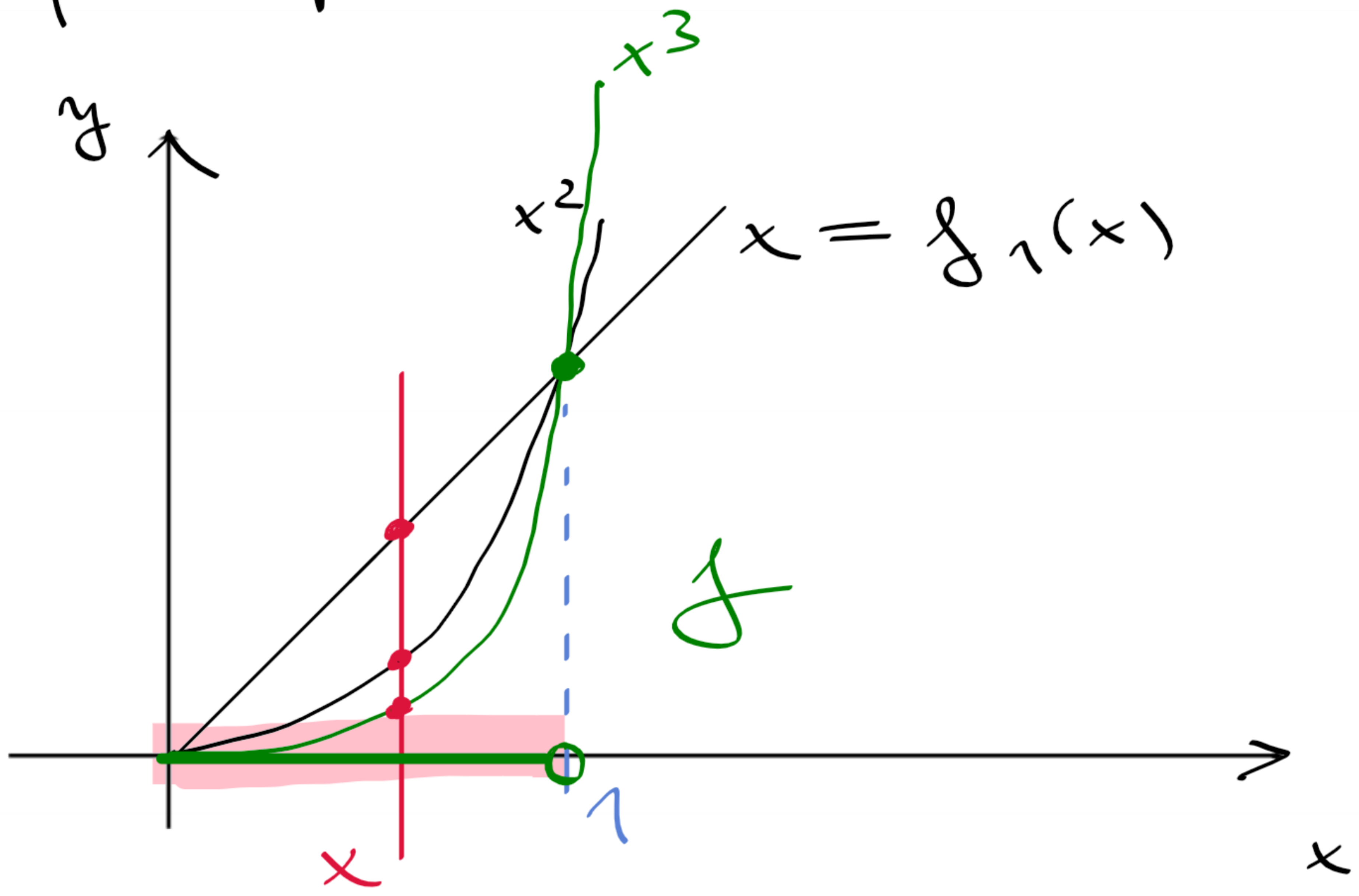
Co je to „posloupnost funkcí"?

Připomeň: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{R}$ je form. funkce $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$: $n \longmapsto a_n$.

Definice: Posloupnost funkcí je zobrazení $\mathbb{N}$ do množiny funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

Příklad: $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Jde o posloupnost: $x, x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots$



V tomto případě $\lim f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

Označme tuto fci f.

MOTIVACE: Záměnce lim. procesů

- $\lim$ • $\sum_{n=1}^{\infty}$ • $(\cdot)'$ • $\int_a^b f(x)\,dx$

O: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$

Příklad: $(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x}$

Víme: Pro $|q|<1$: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Odtud: $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$.

Pro $x \in (-1,1)$: $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad / \int \ldots dx$

$\log(1+x) + C = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right) dx$

$\log(1+x) + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^n\,dx = \sum (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Definice: (Bodová k.) Buď $\{f_n\}$ posl. fcí definovaných aspoň na $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **k. bodově** k f na M, jestliže

$$\forall x \in M : \ f_n(x) \longrightarrow f(x).$$

$$\forall x \in M \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Stejnoměrná k.

Poznámka: (Zachovávání vlastností b.k.)

O: $\forall n$: f_n má vlastnost (*) a $f_n \to f$ na M

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \ f \text{ má } (*) \text{ na } M.$$

(*): (a) spojitost **NE**

(b) omezenost **NE**

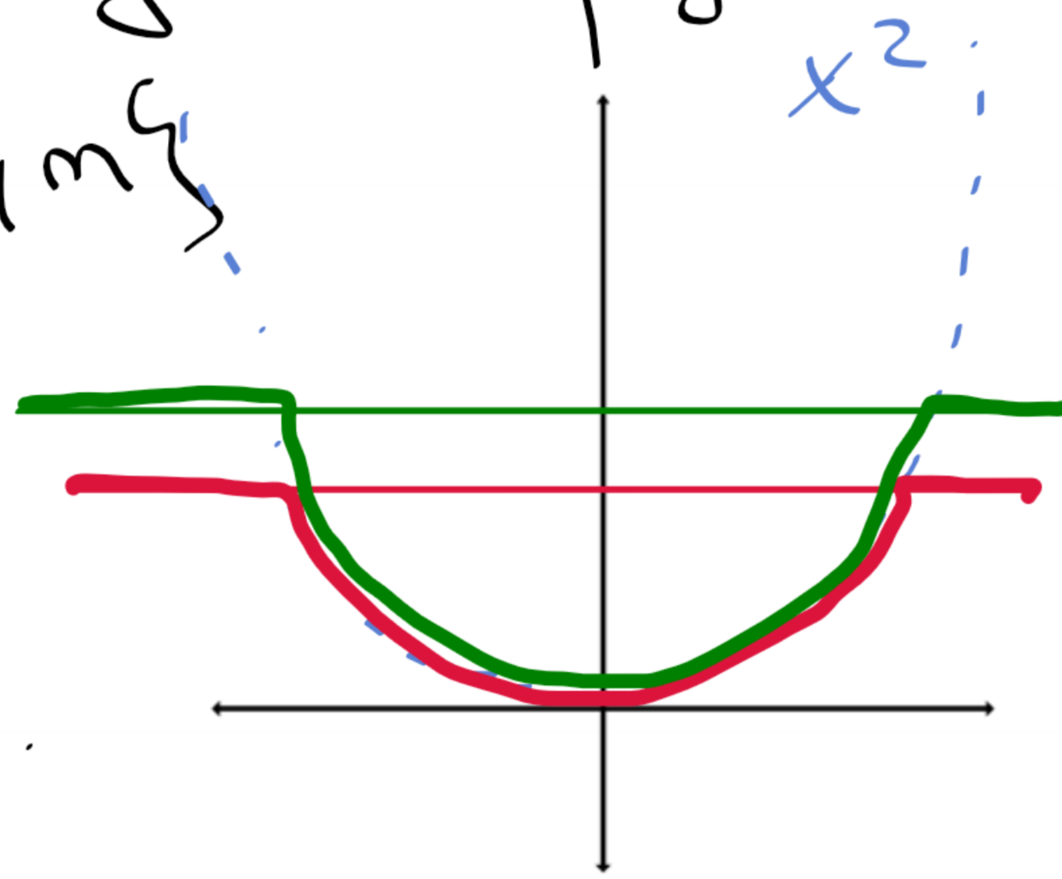
(c) neomezenost **NE**

(d) konvexita **ANO** } Cv.

(e) monotonie **ANO**

Ad (a) ... příklad výše $f_n(x) = x^n$ na $M = [0,1]$. lim. fce nespoj.!

Ad (b): $f_n(x) = \min\{x^2, n\}$



Cv.: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Tj. bodová limita je x^2.

Značení: $[f_n \to f$ na $M]$ znamená, že $\{f_n\}$ konv. bodově k f na M.

Známe: $f_n \to x^2$ na $\mathbb{R}$

f_n omezené, x^2 neomezená

Ad (c): Cv.

Definice (Stejnoměrná k. posl. fcí)

Buďte f_n, f ($n \in \mathbb{N}$) def. aspoň na M.
Řekneme, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně k. k f na M (píšeme $[f_n \rightrightarrows f$ na $M]$), jestliže

bodová

$$\left[\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in M\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right]$$

Poznámka: z pořadí kvantif. jasné:

$(f_n \rightrightarrows f$ na $M) \Longrightarrow (f_n \to f$ na $M)$.

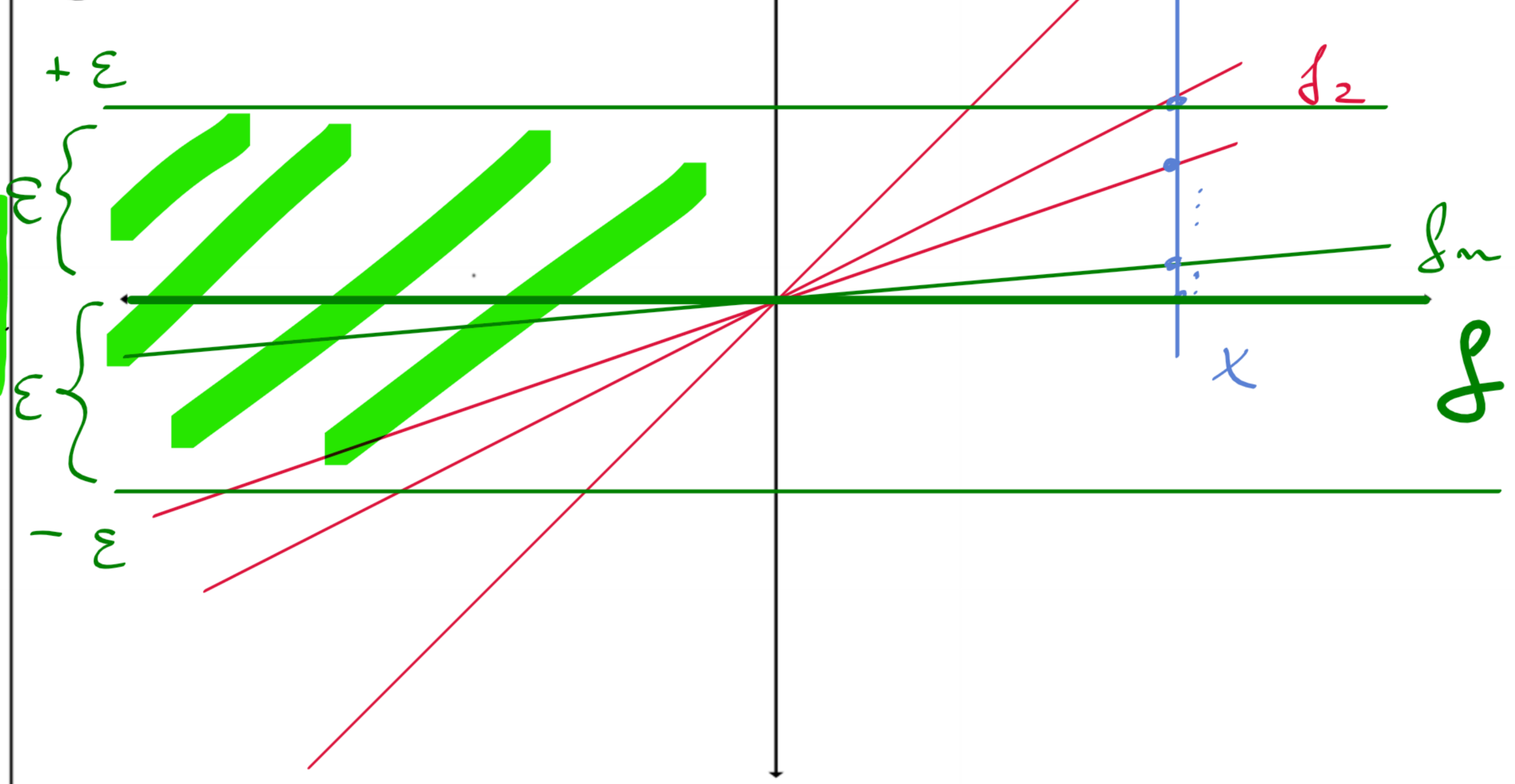
Tedy, známe-li bodovou limitu f, pak jde o jediný kandidát na stejn. lim.

↳ POZOR: Opačná implikace neplatí!

Příklad: $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \dfrac{x}{n} = 0$

$f \equiv 0$ na $\mathbb{R}$ bodová lim.



Nejde o stejnoměrnou k.

Lemma: (O σ_n) Buďte f_n, f ($n \in \mathbb{N}$) def. aspoň na $M \neq \emptyset$. Označme

$$\sigma_n := \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|.$$

Pak

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \iff \sigma_n \to 0,\ n \to \infty.$$

Dk: (⇐) nechť $\sigma_n \to 0$, tj.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |\sigma_n| < \varepsilon$.

Chci dokázat $f_n \rightrightarrows f$ na M, ~~tj.~~ [ ]

Dáno $\varepsilon > 0$, najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ odtud.

Pak $\forall n \geq n_0 : 0 \leq \sigma_n < \varepsilon$.

$$\sigma_n = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \forall x \in M\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(⇒) nechť $[f_n \rightrightarrows f$ na $M]$ Dáno $\varepsilon > 0$.

Vol $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $\forall n \geq n_0\ \forall x \in M$:

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. (můžu díky).

$$\Longrightarrow \sigma_n = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \qquad \boxtimes$$

Příklad: („Klouzající hrb") Existuje posloupnost stejně omezených spojitých fcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na $[0,1]$, $f_n \to 0$, $f_n \not\rightrightarrows 0$.

$f_n(x) = x^n - x^{2n}$ na $[0,1]$

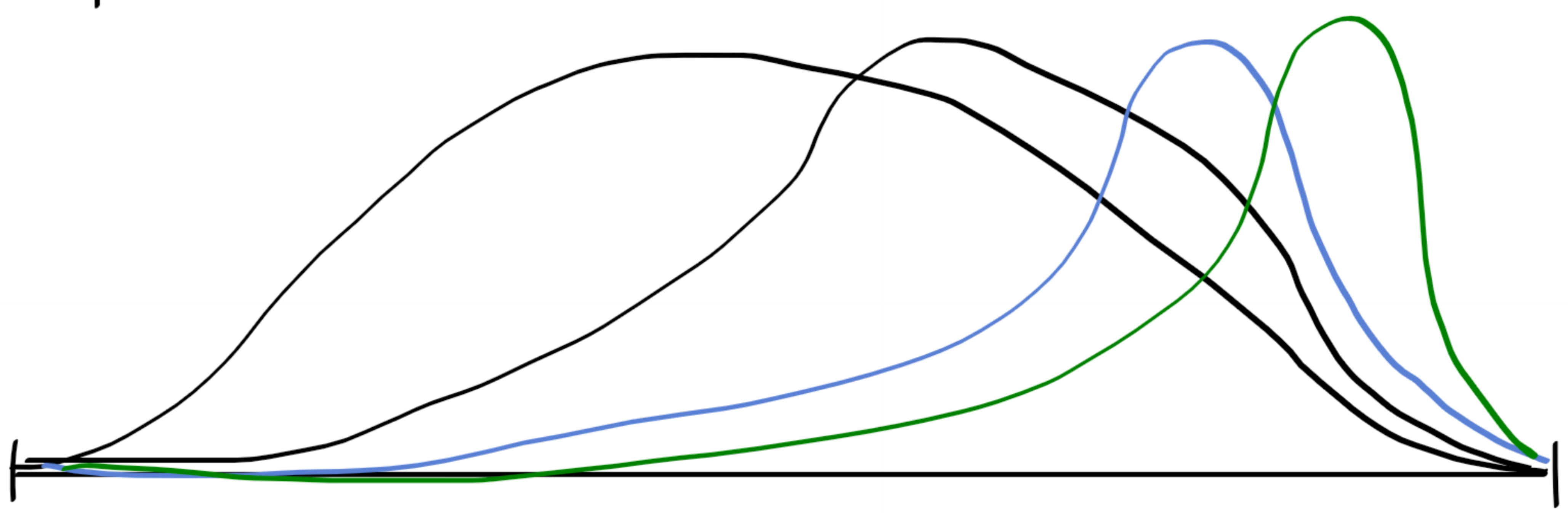
Zjistíte: • $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$

• $\sigma_n := \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| =$

$= \sup_{x \in [0,1]} |x^n - x^{2n} - 0| = \dots = \frac{1}{4}$, $n \in \mathbb{N}$

• Tedy $\lim \sigma_n = \frac{1}{4} \neq 0 \xRightarrow{\text{Lemma}}$

$f_n \not\rightrightarrows f$ na $[0,1]$.



$\longrightarrow 1$

Tvrzení: Stejnoměrná k. zachovává:

- omezenost
- neomezenost

Důkaz: „omezenost": Nechť f_n jsou omezené na M $(n \in \mathbb{N})$, [$f_n \rightrightarrows f$ na M] CHCI: f je omez.

Pro $\varepsilon = 1$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geq n_0 \ \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < 1$$

f_{n_0} je omezená na M, neboli existuje $K > 0$: $\forall x \in M : |f_{n_0}(x)| < K$.

$$|f(x)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{<1} + \underbrace{|f_{n_0}(x)|}_{<K} < 1 + K$$

Tedy fce f je omezená (konstantou $1+K$).

„neomezenost" nyní nechť f_n jsou naopak neomezené. Jen stručně:

$\varepsilon = 1 \rightsquigarrow n_0 : \forall x \in M : |f_{n_0}(x) - f(x)| < 1$

Ovšem f_{n_0} je neomezená $\Longrightarrow f$ je neom.

Fakta: f_n, f def. aspoň na $M \subseteq \mathbb{R}$.

(i) $(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \Longrightarrow (f_n \to f \text{ na } M)$

(ii) $(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \Longrightarrow (f_{n+1} \rightrightarrows f \text{ na } M)$

(iii) $A \subseteq M$, $f_n \rightrightarrows f$ na $M \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ na A

(iv) $(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M_1, M_2, \dots, M_p) \Longrightarrow$

$\left(f_n \rightrightarrows f \text{ na } \bigcup_{i=1}^{p} M_i\right)$ [konečně mnoho!]

Dů.: n_1 pro M_1, n_2 pro M_2 ...

$n_0 := \max\{n_i : i = 1, \dots, p\}$.

↳ funguje pro $\bigcup M_i$.

(v) (Důsledek (iv)): M je konečná $\Rightarrow$

$$\left(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \iff f_n \to f \text{ na } M \right)$$

Věta: nechť f_n, f, g_n, g def. aspoň na $M \subseteq \mathbb{R}$. nechť $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$ na M.

Pak (i) $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$ na M;

(ii) $c \cdot f_n \rightrightarrows c \cdot f$ na M.

Důkaz: (i): **Chci**: $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$ na M.

Dáno $\underline{\varepsilon > 0}$. najdeme $n_1 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_1$:

$\forall x \in M$: $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

najdeme $n_2 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_1$ $\forall x \in M$

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Položíme $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$.

Pak $\forall n \geq n_0$ $\forall x \in M$:

$$|f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \leq$$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Velmi podobně dokážeme (ii).

návod: najdi $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$

$\forall x \in M$: $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{c}$.

Pak:

$$|c \cdot f_n(x) - c f(x)| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

$\boxtimes$